קורס תורת הקבוצות – סתיו תשס"ה

פרק ו': סדר טוב (גרסה 1, 26.12.2004)

115. **הגדרה**. תהי A מחלקה ו-$<$ יחס.
א. אנו אומרים ש-$<$ **מסדר חלקית** את A אם:
אירפלקסיביות: לכל $x \in A$ $x \not< x$.
טרנזיטיביות: לכל $x, y, z \in A$ אם $x < y$ ו- $y < z$ אז $x < z$.
ומכאן נובע: אסימטריה: לכל $x, y \in A$ אם $x < y$ אז $y \not< x$.
ב. אנו אומרים ש-$<$ **מסדר** או **מסדר מלא** את A אם $<$ מסדר חלקית את A וקיים גם:
השוואה: לכל $x, y \in A$ אם $x \neq y$ אז $x < y$ או $y < x$.
ג. אנו אומרים ש-$<$ **מסדר היטב** את A אם $<$ מסדר את A ולכל מחלקה חלקית ל-A שאינה ריקה יש איבר מזערי y, כלומר $y \in A$ ולכל $x \in A$ אם $x \neq y$ אז $y < x$.
דוגמאות לקבוצה סדורה היטב הן הבאות:
א. קבוצת המספרים הטבעיים בסדר הטבעי $0, 1, 2, \ldots$.
ב. קבוצת המספרים השלמים בסדר $0, 1, 2, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$.
ג. קבוצת הזוגות של המספרים הטבעיים בסדר המילוני
$\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \ldots \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots \langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \ldots$.
הסיבה לענין המיוחד ביחס סדר טוב היא הבאה. ישנם הרבה מקרים בהם אנו רוצים לטפל באיברים של קבוצה סדורה אחד אחד לפי הסדר. הדבר הוא אפשרי בקבוצות שבדוגמאות א'-ג'. למשל, בדוגמה ב' אנו מתחילים ב-0, אחרי המספר הטבעי n אנו מטפלים ב- $n+1$, אחרי כל המספרים הטבעיים אנו מטפלים ב--1, ואחרי המספר $-n$, כאשר $n \geq 1$, אנו מטפלים ב- $-(n+1)$. לעומת זאת איננו יכולים לטפל במספרים הרציונליים איבר איבר לפי הסדר הטבעי שלהם כי, ראשית, אפילו אין לנו מספר להתחיל בו, ואם היינו מסיימים את הטיפול בכל המספרים שאינם חיוביים לא קיים מספר חיובי שהוא המספר הבא לפי הסדר. בקבוצה סדורה היטב, בכל שלב של הטיפול, אם עוד נותרו איברים שלא טופלו אז קבוצת האיברים שעדיין לא טופלו אינה ריקה ולכן יש לה איבר מזערי שהוא האיבר הבא לטיפול.

116. **למה**. אם היחס $<$ מסדר חלקית (מסדר, מסדר היטב) את A ו- $B \subseteq A$ אז $<$ מסדר חלקית (מסדר, מסדר היטב, בהתאמה) גם את B.

117. **משפט ההוכחה באינדוקציה על קבוצה סדורה היטב**. תהי A קבוצה שהיא סדורה היטב ע"י היחס R, ותהי **ת** תכונה. אם קיים

צעד האינדוקציה: לכל $x \in A$, אם כל $y \in A$ המקיים yRx הוא בעל התכונה **ת** (כלומר, אם כל הקודמים ל-x ביחס R הם בעלי התכונה **ת**) אז גם x הוא בעל התכונה **ת**

אז

כל איברי A הם בעלי התכונה **ת**.

דיון. מה שנאמר בצעד האינדוקציה על x מתחלק לשני חלקים: החלק "לכל y המקיים yRx הוא בעל התכונה ת" נקרא **הנחת** (צעד) **האינדוקציה** והחלק "x הוא בעל התכונה ת" נקרא **מסקנת צעד האינדוקציה**. כאשר נתונה לנו קבוצה A סדורה היטב ע"י יחס R ואנו רוצים להוכיח שכל איברי A הם בעלי התכונה **ת** משפט ההגדרה באינדוקציה מבטיח לנו שאם נוכיח את צעד האינדוקציה אז נדע כבר שכל איברי A הם בעלי התכונה **ת**. כדי להוכיח את צעד האינדוקציה אנו מניחים ל-x כלשהו את הנחת האינדוקציה ומוכיחים ממנה את מסקנת צעד האינדוקציה.

בהנחה ש-A אינה ריקה, כיצד מבטיח לנו צעד האינדוקציה שאיברה הראשון a הוא בעל התכונה **ת**? מתברר, שצעד האינדוקציה עושה זאת ישירות. מכיוון של-a אין קודמים זה נכון, באופן ריק, שכל קודמיו הם בעלי התכונה **ת**, ולכן צעד האינדוקציה אומר ש-a הוא בעל התכונה **ת** (ולשם כך לא היינו זקוקים למשפט האינדוקציה). כמובן שכאשר אנו מוכיחים את צעד האינדוקציה עלינו לוודא שהוכחה זאת תקפה גם ל-x שהוא האיבר הראשון ב-A. אם אנו מוכיחים את צעד האינדוקציה רק עבור איברים x של A שיש להם קודמים ב-A אז לא הוכחנו את צעד האינדוקציה לכל איברי A, ואיננו יכולים להשתמש במשפט האינדוקציה.

הוכחה. אחרי הדיון הארוך ניגש להוכחה הקצרה. נוכיח את משפט האינדוקציה בדרך השלילה, ולשם כך נניח שלא כל איברי A הם בעלי התכונה **ת**. תהי B קבוצת איברי A שאינם בעלי התכונה **ת**. מכיוון שאנו מניחים שלא כל איברי A הם בעלי התכונה **ת** לכן B אינה ריקה. מכיוון ש-A סדורה היטב ע"י R יש ל-B איבר ראשון שנסמנו ב-b. מכיוון ש-b האיבר הראשון של B לכן איברי A הקודמים ל-b אינם נמצאים ב-B, כלומר הם בעלי התכונה **ת**, בניגוד ל-b שאינו בעל התכונה **ת**, מכיוון שהוא ב-B. כך קבלנו סתירה לצעד האינדוקציה האומר שאם כל הקודמים לאיבר כלשהו x הם בעלי התכונה **ת** אז גם x עצמו הוא בעל תכונה זאת.

האינדוקציה על קבוצה סדורה היטב ידועה גם בשם **אינדוקציה טרנספיניות** שפרושו אינדוקציה על סופית. אחרי מספר מילים על סימונים נראה דוגמה ראשונה לשימוש באינדוקציה זאת.

118. **סימון**. כאשר מדובר בשני יחסי סדר שונים על קבוצה אחת עלינו לסמנם, כמובן, בשני סימנים שונים, כגון R ו-S. אבל כאן אנו נעסוק בדרך כלל רק ביחס סדר אחד על קבוצה ולכן נסמנו ב-$<$, ונדבר על "הקבוצה הסדורה A" במקום לדבר על "הקבוצה A הסדורה ע"י היחס $<$.

כמקובל הסימן $\leq$ יסמן במקרה זה את היחס הנתון ע"י $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$, הסימן $>$ יסמן את היחס הנתון ע"י $x > y \leftrightarrow y < x$. והסימן $\geq$ יסמן את היחס הנתון ע"י $x \geq y \leftrightarrow y \leq x$

אם A, B קבוצות סדורות ו- $F: A \to B$ אז אנו אומרים ש-F **שומרת סדר** אם לכל $x, y \in A$ אם $x < y$ אז $F(x) < F(y)$. כמובן שכל פונקציה שומרת סדר מקבוצה סדורה לקבוצה סדורה היא חד חד ערכית. לפונקציה שומרת סדר מקבוצה סדורה A על קבוצה סדורה B אנו קוראים **איזומורפיזם** מ-A ל-B, וגם **העתקת דימיון** מ-A ל-B, ואנו אומרים ש-A ו-B הן **איזומורפיות** או **דומות**.

קל לראות כי אם F היא איזומורפיזם מ-A על B אז F^{-1} הוא איזומורפיזם מ-B ל-A, ואם גם G הוא איזומורפיזם מ-B ל-C אז GF הוא איזומורפיזם מ-A ל-C. כתוצאה מכך, יחס האיזומורפיזם הוא יחס שקילות, כלומר, רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

לקבוצה B שהיא חלקית לקבוצה סדורה A אנו קוראים **רישא** של A אם לכל איבר $x \in B$ ולכל איבר $y \in A$ הקטן מ-x גם $y \in B$. לכל $z \in A$ הקבוצות $\{x \in A \mid x < z\}$ ו- $\{x \in A \mid x \leq z\}$ הן רישאות של A. גם $\emptyset$ ו-A עצמה הן רישאות של A. לרישא B של A השונה מ-A אנו קוראים **רישא ממש** של A.

119. **משפט** תהי A קבוצה סדורה היטב ו- $F: A \to A$ שומרת סדר. אז קיים לכל $x \in A$ $F(x) \geq x$.

הוכחה. נוכיח את $F(x) \geq x$ לכל $x \in A$ באינדוקציה על x. נניח, כהנחת האינדוקציה, כי לכל $y < x$ קיים $f(y) \geq y$ ונוכיח כי $f(x) \geq x$. נניח, כדי להגיע לסתירה, כי $f(x) < x$. מכיוון ש-f שומרת סדר אי-שיוויון זה נשמר כאשר נפעיל את f על שני אגפיו ומתקבל $f(f(x)) < f(x)$. כך עבור y שהוא $f(x)$ והוא קטן מ-x קיים $f(y) < y$, בניגוד להנחת האינדוקציה.

120. **תרגיל**. אם A קבוצה סדורה היטב אז העתקת הזהות היא העתקת הדימיון היחידה של A על עצמה. יש למשפט זה שתי הוכחות: האחת משתמשת ב-119 ללא אינדוקציה והשניה היא באינדוקציה.

121. **תרגיל**. אם A ו-B הן קבוצות סדורות דומות אז קיימת העתקת דימיון יחידה של A על B.

יש למשפט זה שתי הוכחות: האחת משתמשת ב-120 ללא אינדוקציה והשניה היא באינדוקציה.

122. **הגדרת פונקציה ברקורסיה על קבוצה סדורה היטב**. כאשר אנו באים להגדיר ברקורסיה פונקציה F על קבוצה סדורה היטב A אנו מגדירים את הערך $F(x)$ בתלות בערכים של F על איברים של A הקודמים ל-x. כל המידע על ההתנהגות F על איברי A הקודמים ל-x מצוי בפונקציה $F \restriction \{y \in A \mid y < x\}$ ולכן הצורה הכללית ביותר של הגדרת F ברקורסיה היא

$$F(x) = H(F \restriction \{y \in A \mid y < x\}) \quad ,x \in A \text{ לכל} \qquad (*)$$

היכן ש-H היא פונקציה נתונה מראש שתחומה הוא מחלקת כל הפונקציות.
ברור כי $(*)$ אינה הגדרה מפורשת של F, כי בהגדרה מפורשת הפונקציה F שמגדירים אותה אינה מופיעה בצד ימין של שיוויון ההגדרה. כדי ש-$(*)$ תהיה הגדרה לגיטימית יש להוכיח כי קיימת פונקציה F יחידה המקיימת את $(*)$ ואז אנו יכולים להגדיר את F כפונקציה היחידה המקיימת את $(*)$. ההוכחה שאין יותר מפונקציה F אחת המקיימת את $(*)$ היא הוכחה קלה באינדוקציה. ההוכחה שבאמת קיימת פונקציה F המקיימת את $(*)$ היא יותר ארוכה. אנו נקבל כאן את עקרון ההגדרה ברקורסיה ללא הוכחה. שימוש חשוב ביותר של עקרון זה הוא המשפט הבא.

123. **משפט**. לכל שתי קבוצות סדורות היטב A ו-B, קיימת העתקת דימיון מאחת מהן על רישא של השניה.
הוכחה. רעיון ההוכחה הוא להעתיק את האיבר הראשון של A לאיבר הראשון של B, האיבר השני של A לאיבר השני של B וכן הלאה עד שבאחת משתי הקבוצות לא נותרים איברים. הגדרת פונקציה F העושה זאת הינה הגדרה ברקורסיה, כי מכיוון שאין ברשותנו מספרים כדי להתאים את איברי B לאיברי A אנו מתאימים לאיבר x של A את האיבר המזערי של B שלא הותאם לאיברים קודמים של A, וכך אנו מגדירים את $F(x)$ בתלות בערכי F עבור איברי A הקודמים ל-x. כך ההגדרה של F אמורה להיות: לכל $x \in A$, $F(x)$ הוא האיבר המזערי של $B \setminus \{F(y) \mid y < x\}$. יש עם הגדרה כזאת רק בעייה אחת, והיא שיתכן שהקבוצה B "נגמרת לפני A" והקבוצה $B \setminus \{F(y) \mid y < x\}$ היא ריקה ואין לה איבר מזערי. לכן נקח עצם כלשהו שאינו ב-B, נקרא לו end ונגדיר את הפונקציה F בתחום A ברקורסיה ע"י שנקבע לכל $x \in A$

$$F(x) = \begin{cases} B \setminus \{F(y) \mid y < x\} \text{ האיבר המזערי של} & B \setminus \{F(y) \mid y < x\} \neq \emptyset \text{ אם} \\ \text{end} & \text{אחרת} \end{cases}$$

כעת נפריד בין שני מקרים:
מקרה א': הקבוצה B לא נגמרה תוך כדי הגדרת F, כלומר $\text{end} \notin \text{Range}(F)$, ואז ברור כי $\text{Range}(F) \subseteq B$. נראה כי במקרה זה F היא העתקה שומרת סדר של A על רישא של B.
ראשית נוכיח כי אם $x, z \in A$ ו- $z < x$ אז $F(z) < F(x)$. לפי הגדרת $F(x)$ ברור כי $F(x)$ שונה מכל $F(y)$ עבור $y < x$, ובמיוחד $F(x) \neq F(z)$ ו- $F(x) \notin \{F(y) \mid y < z\}$ ולכן $F(x) \in B \setminus \{F(y) \mid y < z\}$. לפי הגדרת $F(z)$ $F(z)$ הוא האיבר המזערי של הקבוצה $B \setminus \{F(y) \mid y < z\}$ המכילה את $F(x)$ והוא שונה מ-$F(x)$, לכן $F(z) < F(x)$ ו-F היא שומרת סדר.
כעת, כדי להוכיח כי טווח F הוא רישא של B, יהיו $u < v \in \text{Range}(F)$ ונוכיח כי גם $u \in \text{Range}(F)$. מכיוון ש- $v \in \text{Range}(F)$ קיים $x \in A$ כך ש- $v = F(x)$. לפי הגדרת $F(x)$ $F(x)$ הוא האיבר המזערי של $B \setminus \{F(y) \mid y < x\}$, ולכן מכיוון ש- $u < F(x)$ u אינו בקבוצה זאת, ומכיוון ש- $u \in B$ זה אומר ש- $u \in \{F(y) \mid y < x\}$. לכן קיים $y < x$ כך ש- $u = F(y)$, ולכן $u \in \text{Range}(F)$ וטווח F הוא רישא של B. כך קבלנו, במקרה זה, העתקת דימיון של A על רישא של B.
מקרה ב': $\text{end} \in \text{Range}(F)$. יהי, אם כן, u האיבר המזערי של A כך ש- $F(u) = \text{end}$, ואז לכל $x < u$

$F(x) \in B$, כלומר $\{F(y) \mid y < u\} \subseteq B$. לפי הגדרת $F(u)$ קיים $B \setminus \{F(y) \mid y < u\} = \emptyset$ ולכן $\{F(y) \mid y < u\} = B$, כלומר $\mathrm{Range}(F \restriction \{y \mid y < u\}) = B$. נסמן את $F \restriction \{y \mid y < u\}$ ב-G, ואז תחום G הוא הרישא $\{y \mid y < u\}$ של A, וטווח G הוא, כפי שראינו, B. נראה כי G שומרת סדר. יהיו $z < x$ בתחום G, כלומר $z < x < u$. מכיוון ש- $x < u$ ולפי הגדרת $F(x)$ ברור כי $F(x)$ שונה מכל $F(y)$ עבור $y < x$, ובמיוחד $F(x) \neq F(z)$ ו- $F(x) \notin \{F(y) \mid y < z\}$ ולכן $F(x) \in B \setminus \{F(y) \mid y < z\}$. מכיוון ש- $z < u$ ולפי הגדרת $F(z)$ $F(z)$ הוא האיבר המזערי של הקבוצה $B \setminus \{F(y) \mid y < z\}$ המכילה את $F(x)$ והוא שונה מ-$F(x)$, לכן $F(z) < F(x)$, כלומר $G(z) < G(x)$ ו-G היא שומרת סדר. כך קבלנו במקרה זה העתקת דימיון G של רישא של A על B והפונקציה G^{-1} היא העתקת דימיון של B על רישא של A.

בהוכחת משפט 123 הגדרנו ברקורסיה פונקציה F, ועל פניה הגדרת F אינה במתכונת של ההגדרה $(*)$ במשפט 122 שהוא המשפט המתיר לנו להשתמש בהגדרה ברקורסיה. נראה עתה כיצד משתלבת ההגדרה ב-123 במתכונת של משפט ההגדרה ברקורסיה. בהינתן קבוצה סדורה היטב B ועצם $\mathrm{end} \notin B$ נגדיר פונקציה H שתחומה היא מחלקת כל הפונקציות ע"י שנקבע לכל פונקציה f את הערך $H(f)$ כדלקמן: אם $B \setminus \mathrm{Range}(f) \neq \emptyset$ אז $H(f)$ הוא האיבר המזערי של קבוצה זאת, ואחרת $H(f) = \mathrm{end}$. במתכונת ההגדרה ברקורסיה אנו משתמשים ב- $H(F \restriction \{y \in A \mid y < x\})$. מכיוון
ש- $\mathrm{Range}(F \restriction \{y \in A \mid y < x\}) = \{F(y) \mid y < x\}$ לכן עבור H כפי שבחרנו זה עתה מתכונת ההגדרה ברקורסיה נותנת ש-$F(x)$ הוא האיבר המזערי של $B \setminus \{F(y) \mid y < x\}$ אם קבוצה זאת אינה ריקה ו- $F(x) = \mathrm{end}$ אחרת. זאת הנה בדיוק ההגדרה בה השתמשנו ב-123.

124. **תרגיל**. הוכח את משפט 123 ללא שימוש בהגדרה ברקורסיה כדלקמן. תהי W קבוצת כל ההעתקות שומרות הסדר מרישא של A על רישא של B. תהיינה $F, G \in W$ הוכח, באינדוקציה על x שאם x בחיתוך התחומים של F ו-G אז $F(x) = G(x)$, כלומר ש-F ו-G מתיישבות. לכן האחוד $H = \bigcup W$ של כל איברי W הוא פונקציה. הוכח תחילה כי גם H היא פונקציה שומרת סדר מרישא של A לרישא של B, ולאחר מכן כי תחום H הוא A או טווח H הוא B, כי אחרת ניתן להרחיב את H לפונקציה שתחומה מקיף ממש את תחום H וגם היא ב-W.

ממשפט 123 אנו רואים שאם A ו-B הן שתי קבוצות שקיימים עליהם יחסי סדר טוב כלשהם אז $A \prec B$ או $B \prec A$, ובמעבר לעוצמות, כי $|A| \leq |B|$ או $|B| \leq |A|$. עד כה לא יכולנו להוכיח זאת לסתם שתי קבוצות A ו-B. מצב זה לא תאם את האינטואיציה הפשוטה האומרת שמכיוון שהעוצמות מייצגות כמויות אז אם שתי כמויות אינן שוות אז אחת מהן צריכה להיות גדולה מחברתה. כמובן שאיננו צריכים לקחת את האינטואיציה הזאת לגמרי ברצינות כי אינטואיציה זאת באה מניסיוננו עם כמויות סופיות והיא אינה מתאימה בהכרח לכמויות אינסופיות. משפט 122 אומר לנו שעוצמות של קבוצות הניתנות לסידור היטב הן תמיד ניתנות להשוואה, ולכן אם נצליח להוכיח שכל קבוצה ניתנת לסידור היטב אז נדע שכל שתי עוצמות ניתנות להשוואה, ואמנם אפשר להוכיח זאת תוך שימוש באקסיומת הבחירה. ננסח עתה את המשפט ונרמוז כיצד להוכיח אותו. נביא הוכחה מלאה שלו, בדרך שונה במעט, מאוחר יותר.

125. **משפט** (אה"ב). על כל קבוצה A קיים יחס $<$ המסדר את A היטב.

קווים כלליים להוכחה. באופן גס הרעיון הוא לבחור איבר כלשהו של A בתור איבר ראשון, איבר אחר כלשהו של A כאיבר שני ולהמשיך כך עד שלא נותרים איברים ב-A. כפי שידוע לנו איננו יכולים להשתמש בהגדרה באינסוף בחירות. יתר על כן, יש לנו בעייה אפילו לתאר באופן מדוייק את התהליך הזה. כדי שנוכל לתאר ולנסח את התהליך הזה בצורה מסודרת אנו זקוקים לפונקצית בחירה C על קבוצת החזקה של A, ונעבוד עם פונקציה C קבועה כזאת. בהינתן פונקציה C זאת אנו יכולים לבנות סדר טוב ל-A באופן שיטתי כדלקמן. האיבר הראשון של A יהיה $C(A)$, השני יהיה $C(A \setminus \{C(A)\})$, וכן הלאה, ובאופן כללי כל איבר

x של A יהיה האיבר הנבחר ע"י C מקבוצת האיברים שלא הוכנסו לסדר לפני x. גם ההוכחה הנוכחית וגם ההוכחה שנביא מאוחר יותר נותנות את הסדר שתארנו כאן אינטואיטיבית.

בשם **קבוצה סדורה שיטתית** נקרא לקבוצה $B \subseteq A$ עם יחס סדר טוב R שבו כל איבר x של B הוא האיבר הנבחר מבין כל איברי A שלא נכנסו לפני x, כלומר, לכל $x \in B$ $\ x = C(A \setminus \{y \in A \mid yRx\})$.

כעת יש ללכת בצעדים הבאים:

א. לכל שתי קבוצות סדורות שיטתית, אחת מהן היא רישא של חברתה. כאן אפשר להשתמש במשפט 123.

ב. האחוד של כל הקבוצות הסדורות שיטתית, עם אחוד יחסי הסדר שלהן, הוא קבוצה סדורה שיטתית, שהיא כמובן הקבוצה הסדורה שיטתית המירבית.

ג. קבוצה סדורה שיטתית זאת היא הקבוצה A כולה, כי אחרת ניתן להרחיב אותה לאיבר נוסף של A, בניגוד למירביותה.